



Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Geoscience 336 (2004) 561–566



## Géosciences de surface (Pédologie) Contribution à l'étude de la vitesse critique d'érosion des sols cohésifs

Julien Gargani

Laboratoire de sédimentologie – CGES, École nationale supérieure des mines de Paris, 35, rue Saint-Honoré,  
77305 Fontainebleau cedex, France

Reçu le 20 juin 2003 ; accepté après révision 24 novembre 2003

Disponible sur Internet le 9 avril 2004

Présenté par Ghislain de Marsily

### Résumé

Les processus d'érosion et de sédimentation dans les rivières sont abordés de façon qualitative et quantitative. Une solution analytique est proposée pour calculer la vitesse critique de sédimentation et d'érosion dépendant des propriétés physiques du matériel, de sa géométrie et des caractéristiques du flux d'eau. La vitesse critique d'érosion du lit des rivières, telle qu'elle a été déterminée par Hjulström [Bull. Geol. Inst. Univ. Uppsala 25 (1935) 221], s'explique par le comportement cohésif du matériau. La cohésion est dominée par l'action d'une force en  $1/r^2$  pour les particules les plus petites et peut être modélisée en tenant compte de la contrainte de rupture de Coulomb. En revanche, la vitesse critique de sédimentation peut être interprétée plus simplement avec un modèle non cohésif ( $C = 0$ ). **Pour citer cet article : J. Gargani, C. R. Geoscience 336 (2004).**

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

### Abstract

**Theoretical contribution to the critical velocity of erosion of a cohesive bedload.** The phenomena of erosion and sedimentation in rivers are treated qualitatively and quantitatively. An analytical solution of the bedload critical velocity for erosion and sedimentation is proposed, depending on material property, geometry and on flow characteristics. The critical velocity of erosion of the river bed, as defined by Hjulström in 1935, can be explained by a cohesive behaviour of the grains. Whereas the cohesive force is dominated by an  $1/r^2$  ( $r$  is the radius of grains) force when grains are small, it can be modelled by the cohesion  $C$  and the friction angle  $\phi$  for larger grains. **To cite this article: J. Gargani, C. R. Geoscience 336 (2004).**

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

*Mots-clés :* érosion ; sédimentation ; cohésion ; vitesse critique ; Van der Waals ; particule

*Keywords:* erosion; sedimentation; cohesion; critical velocity; Van der Waals; particule

### Abridged English version

#### 1. Introduction

The bedload of rivers can be composed by non-cohesive and cohesive materials. For the non-cohesive

bedloads, some empirical formulae have been proposed to calculate the critical stress [8]. A statistical approach has also been proposed to solve the problem of the critical stress [4]. In the last decade, some interesting models have been developed on the grain movement or on the complex interaction between particles [1,2,12,13].

Adresse e-mail : [julien.gargani@ensmp.fr](mailto:julien.gargani@ensmp.fr) (J. Gargani).

But these equations do not take into account the cohesion of the bedload. The Hjulström diagram [7,9] cannot be explained by the previous models. In spite of various and justified criticisms, the Hjulström diagram suggests the existence of other processes. How can we explain the Hjulström diagram (Fig. 5)?

The cohesion between grains is one of the less studied mechanism influencing the critical velocity necessary to move particles. The cohesion can be due to organic action but also to physical forces [3] (Figs. 1 and 3). Can cohesion explain the Hjulström diagram? And what kind of cohesion?

The aim of this study is to model the critical velocity necessary to move grains into the rivers, especially for cohesive bedloads. We propose an analytical solution based on classical physical principles.

## 2. Critical velocity

We have modelled the critical velocity necessary to move grains taking into account the cohesion  $C$  and the friction angle  $\phi$  (Fig. 2). These two physical characteristics are representative of the mechanical properties of the material. But considering only these aspects, the model (Eq. (4)) cannot explain the Hjulström diagram for the smallest particles (Fig. 4).

## 3. Force in $1/r^2$

We need to consider another force in  $1/r^2$  acting on particles. Considering this force (Eq. (5)), we can explain the Hjulström diagram for all the grains, whereas previous studies explain only in part the Hjulström diagram (Fig. 6). The force in  $1/r^2$  can be due to the Van der Waals force, as suggested by Dade et al. [3].

## 4. Conclusion

Our model can explain a larger range of critical velocities for river erosion than previous ones. We take into account the Coulomb stress criteria ( $C$ ,  $\phi$ ) and a force in  $1/r^2$  (where  $r$  is the radius of the particles). The friction angle  $\phi$  increases the resistance of the material to erosion (Fig. 7). The viscosity of the flow  $\nu$  increases its capacity of erosion (Fig. 8).

## 1. Introduction

Les rivières peuvent être composées de matériel cohésif ou non cohésif. Pour le matériel non cohésif, plusieurs formules empiriques ont été obtenues pour calculer le seuil critique de mise en mouvement [8]. Auparavant, une approche statistique avait été réalisée par Einstein [4], en prenant en compte la plupart des facteurs physiques qui influencent le processus. Dans les dernières décennies, différents modèles ont été proposés pour interpréter le mouvement des grains non-cohésifs dans l'eau et les interactions complexes entre les particules, ce qui a permis d'obtenir des résultats intéressants [1,2,12,13].

Mais ces formules ne rendent compte que d'une partie de l'érosion en œuvre dans le lit des rivières et en milieu marin [11]. En effet, elles ne s'appliquent pas à des substrats cohésifs. De plus, des résultats expérimentaux sur la vitesse critique d'érosion et de sédimentation [7,9] ne sont pas expliqués par les théories actuelles. Construit à partir d'une synthèse de différents travaux conduits en laboratoire ou sur le terrain, sur des substrats homogènes pouvant être cohésifs, le diagramme de Hjulström (Fig. 5) est controversé. En effet, les méthodes de mesure des différents points expérimentaux ne sont pas homogènes entre elles et sont approximatives. Néanmoins, le résultat obtenu concorde avec celui d'autres travaux [3] et l'allure générale du diagramme est bien établie. Il reste donc à préciser les règles de comportement des grains lors de leur mise en mouvement.

Des mécanismes physiques plus fins que ceux établis pour les substrats non cohésifs sont nécessaires pour interpréter les vitesses critiques d'érosion et de sédimentation dans la nature. Parmi les mécanismes influençant les seuils de mise en mouvement, la cohésion est certainement celui qui a été parmi les moins étudiés. La cohésion des particules peut être due à de multiples facteurs, comme, par exemple, la présence d'agents organiques entre les particules de petite taille, la présence de microbes, ou l'existence de forces agissant à l'échelle microscopique [3].

La cohésion du substrat augmente la résistance à l'érosion : mais peut-elle, à elle seule, expliquer le comportement des particules sur le lit de la rivière ? Et si oui, quel type de cohésion ?

Le but de cette étude est de modéliser le seuil de mise en mouvement des particules dans les rivières, en

particulier pour les substrats cohésifs. Nous proposons une solution analytique simple, basée sur des lois physiques classiques, utilisant des coefficients dont la détermination empirique est un objet d'étude bien documenté.

**2. Bilan des forces**

Sur le lit d'une rivière, les forces agissant sur une particule de rayon  $r$  et de masse volumique  $\rho_p$  sur une pente  $\beta$ , dont la vitesse caractéristique du courant est  $V_{fluide}$  et dont la masse volumique est  $\rho_f$  sont (Fig. 1) :

- la composante dans le sens de la pente du poids  $F_w = \frac{4}{3} \pi r^3 (\rho_p - \rho_f) g \sin \beta$  ;
- les forces de résistance  $2\pi r^2 \tau$  ;
- la force d'entraînement par le courant  $F_D = 2\pi r^2 C_D \rho_f V_{fluide}^2$  ;

où nous faisons l'hypothèse, sur la base de résultats empiriques obtenus par Pye [10], que le coefficient d'entraînement  $C_D$  est une fonction du nombre de Reynolds  $Re$  :

$$C_D = \frac{24}{Re} + 0,26 \tag{1}$$

Nous négligeons ici la force de soulèvement générée par le courant, dont l'amplitude est dix fois moins élevée que la force d'entraînement (*drag force*) [3]. Cependant, celle-ci peut en certaines occasions jouer un rôle important dans les processus d'érosion [6].

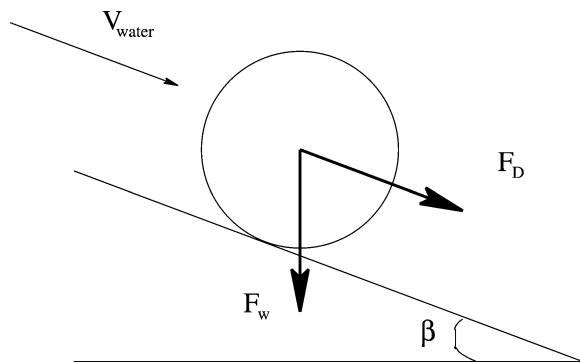


Fig. 1. Diagramme de définition des forces agissant sur une particule isolée.

Fig. 1. Force definition diagram for an isolated particle.

À l'équilibre ( $\tau = \tau_{crit}$ ), la vitesse critique de l'eau (du fluide) est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \pi r^3 (\rho_p - \rho_f) g \sin \beta + 2\pi r^2 C_D \rho_f V_{fluide}^2 \\ = 2\pi r^2 \tau_{crit} \end{aligned} \tag{2}$$

**3. Vitesse critique**

Pour simplifier l'étude de l'érosion, les substrats non cohésifs ont été davantage étudiés dans les publications que les substrats cohésifs. Nous allons ici étudier les substrats des rivières de façon plus générale. Nous avons modélisé un matériel cohésif en considérant que celui-ci dépend de deux paramètres principaux : la cohésion  $C$  et l'angle de friction  $\phi$  ( $\tan \phi = \mu$ ).

La contrainte critique  $\tau_{crit}$  nécessaire pour produire la rupture dépend des caractéristiques du substrat. Pour calculer la contrainte critique en fonction des forces exercées et des caractéristiques du substrat, on utilise le diagramme de Mohr (Fig. 2). Le point  $M(X, Z)$  matérialise le point de rupture du substrat, pour des contraintes  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ .

$$Z = OM \times \cos \phi$$

avec

$$OM = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

où  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont les contraintes exercées sur la superficie du substrat par le courant et la pression de l'eau (Fig. 3).

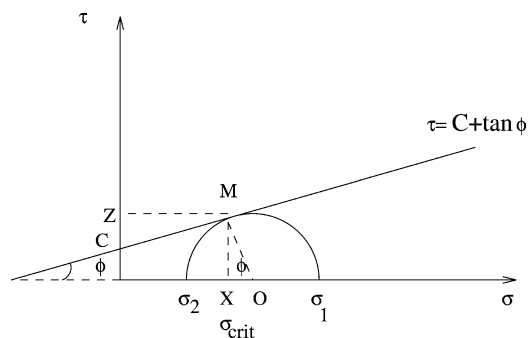


Fig. 2. Diagramme de définition de la cohésion  $C$  et de l'angle de friction  $\phi$ .

Fig. 2. Cohesion  $C$  and friction angle  $\phi$  definition diagram.

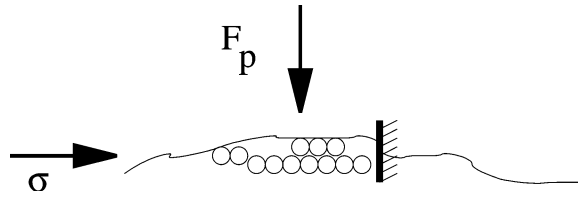


Fig. 3. Diagramme des contraintes pour un substrat cohésif.

Fig. 3. Stress definition for a cohesive substrate.

On obtient :

$$X = \frac{Z}{\tan \phi} - \frac{C}{\tan \phi}$$

d'où la contrainte critique :

$$\tau_{\text{crit}_1} = \frac{C_D \rho_f V_{\text{fluide}}^2}{2} \frac{\cos \phi}{\tan \phi} + \frac{C}{\tan \phi} \quad (3)$$

où  $h$  est la hauteur d'eau.

En partant de l'équation (2) et en utilisant l'équation (3), on obtient une équation du second degré pour la vitesse critique d'érosion des substrats cohésifs  $V_{\text{fluide}}$ , dont une seule des deux racines a un sens physique. La solution est :

$$V_{\text{fluide}} = \frac{\frac{12\nu}{r} + \sqrt{\Delta}}{0,13 \rho_f} \quad (4)$$

avec

$$\Delta = \left( \frac{12\nu}{r} \right)^2 - 4 \times 0,13 \rho_f \left( 1 - \frac{\cos \phi}{2 \tan \phi} \right)^{-1} \times \left( \frac{r}{3} (\rho_p - \rho_f) g \sin \beta + \frac{1}{4} \rho_f h g \frac{\cos \phi}{\tan \phi} + \frac{C}{2 \tan \phi} \right)$$

où  $\nu$  est la viscosité dynamique.

La connaissance de la contrainte critique nous permet de calculer la vitesse critique à partir de laquelle il y a ou non possibilité de mouvement (équation (4)).

La vitesse critique pour un matériel non cohésif ( $C = 0$ ) peut être interprétée comme la vitesse en dessous de laquelle il y a sédimentation des particules (Fig. 4). Pour une cohésion nulle, le modèle permet d'expliquer une partie du diagramme de Hjulström (Fig. 5). On remarque un double changement de pente dans le modèle. Le changement de pente aux alentours de 10 mm est également observable dans le diagramme de Hjulström.

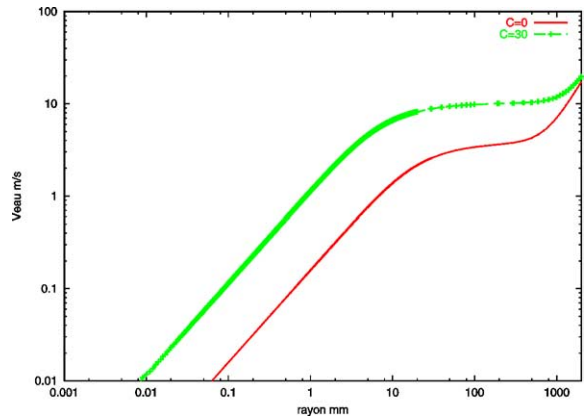
Fig. 4. Vitesse critique pour un substrat cohésif :  $C = 30$  kPa (trait gras),  $C = 0$  kPa (trait fin),  $\phi = 10^\circ$ ,  $\beta = 5^\circ$ ,  $\nu = 1 \text{ mm}^2 \text{ s}^{-1} = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ,  $\rho_p = 2600 \text{ kg m}^{-3}$ .

Fig. 4. Critical velocity for a cohesive substrate:  $C = 30$  kPa (bold line),  $C = 0$  kPa.  $\phi = 10^\circ$ ,  $\beta = 5^\circ$ ,  $\nu = 1 \text{ mm}^2 \text{ s}^{-1} = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ,  $\rho_p = 2600 \text{ kg m}^{-3}$ .

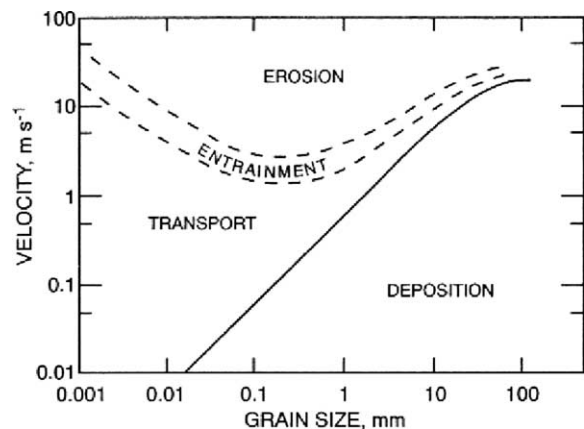


Fig. 5. Diagramme de Hjulström [7].

Fig. 5. Hjulström diagram [7].

En utilisant une cohésion raisonnable pour le substrat du lit de la rivière ( $C < 40$  kPa), on peut calculer la vitesse critique théorique d'érosion. Cependant la cohésion, définie par la loi de Coulomb seule, ne permet pas d'expliquer le comportement des particules les plus petites. On remarque notamment que la vitesse réelle nécessaire pour mettre en mouvement les particules cohésives est plus grande que ne le prévoit le modèle (Figs. 4 et 5).

#### 4. Force en $1/r^2$

En faisant l’hypothèse qu’une force en  $1/r^2$  (où  $r$  est le rayon des particules) agit sur les particules cohésives, ceci permet d’accroître la résistance aux processus d’érosion pour les petites particules et permet d’expliquer le diagramme de Hjulström.

En effet, en tenant compte d’une telle force dans l’équation fondamentale de la dynamique, on obtient une équation du second degré, dont une seule des deux racines est positive. La solution est alors :

$$V_{\text{fluide}} = \frac{\frac{12\nu}{r} + \sqrt{\Delta_2}}{0,13 \rho_f} \tag{5}$$

avec

$$\Delta_2 = \left(\frac{12\nu}{r}\right)^2 - 4 \times 0,13 \rho_f \left(1 - \frac{\cos \phi}{2 \tan \phi}\right)^{-1} \times \left(\frac{r}{3}(\rho_p - \rho_f) g \sin \beta + \frac{1}{4} \rho_f h g \frac{\cos \phi}{\tan \phi} + \frac{C}{2 \tan \phi} - \frac{B}{r^2}\right)$$

où  $B$  est une constante ( $\sim 0,01 \text{ kg m}^3 \text{ s}^{-2}$ ). L’équation (5) permet de retrouver des valeurs proches de celles du diagramme de Hjulström (Fig. 6). Si la taille des particules  $r$  est inférieure à 0,1 mm, la vitesse critique d’érosion diminue avec la taille des particules. Pour les particules pour lesquelles  $r$  est supérieur à 0,2 mm, la vitesse critique nécessaire à l’érosion des substrats cohésifs augmente avec la taille des particules.

De plus, le comportement de cette équation semble cohérent vis-à-vis des différents paramètres ( $C, \phi, \nu$ ). Ainsi, plus l’angle de friction  $\phi$  du substrat est petit, plus facilement le lit de la rivière est érodé (Fig. 7). Quand la cohésion  $C$  du substrat de la rivière augmente, la difficulté pour éroder son lit augmente, et donc le seuil de mise en mouvement augmente.

La viscosité de l’eau influence le processus érosif. Plus l’eau a une viscosité importante, moins le seuil nécessaire pour mettre en mouvement le substrat cohésif est important (Fig. 8). La capacité érosive est donc augmentée. Néanmoins, le modèle ne tient pas compte du couplage entre la charge sédimentaire du flux et la vitesse du flux. En effet, une forte charge sédimentaire aura tendance à ralentir le flux et donc à diminuer la capacité érosive.

Nous avons vu qu’une force en  $1/r^2$  permettrait d’expliquer le comportement des particules soumises

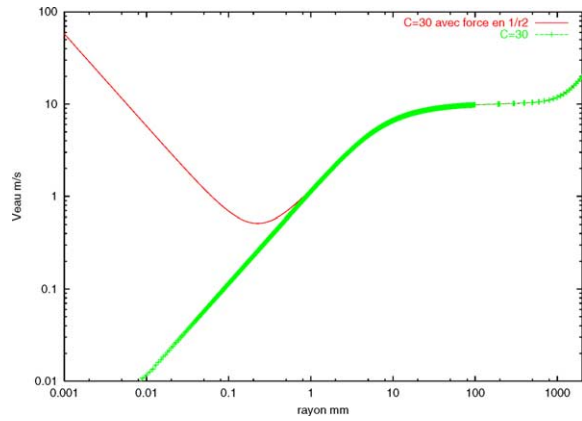


Fig. 6. Vitesse critique pour un substrat cohésif : comparaison avec un modèle en  $1/r^2$ .  $B = 0,01 \text{ kg m}^3 \text{ s}^{-2}$ .

Fig. 6. Critical velocity for a cohesive substrate: comparison with a model in  $1/r^2$ .  $B = 0.01 \text{ kg m}^3 \text{ s}^{-2}$ .

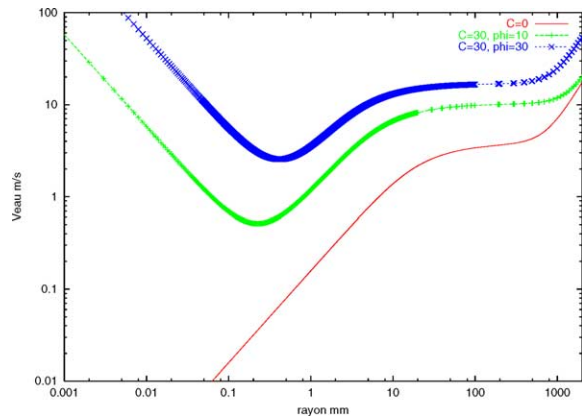


Fig. 7. Comportement théorique du modèle cohésif :  $\phi = 10^\circ$  et  $\phi = 30^\circ$ .

Fig. 7. Theoretical impact of the friction angle:  $\phi = 10^\circ$  and  $\phi = 30^\circ$ .

à l’érosion des rivières. La force de Van der Waals pourrait être à l’origine d’un tel phénomène. En effet, en tenant compte, pour les petites particules, des forces d’attraction exercées par les forces de Van der Waals, on obtient la force de Hamaker [5] pour une particule de rayon  $r$  à une distance  $d$  d’une surface macroscopique (équation (6)).

$$F = -\frac{A r}{6 d^2} \tag{6}$$

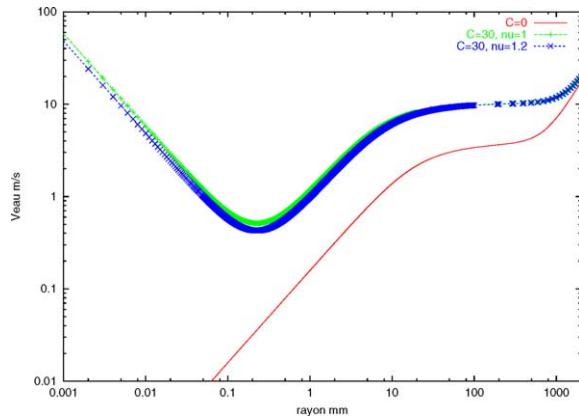


Fig. 8. Comportement théorique du modèle cohésif :  $\nu = 1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  et  $\nu = 1,2 \text{ mm}^2 \text{ s}^{-1} = 1,2 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  pour deux viscosités.

Fig. 8. Theoretical influence of the dynamic viscosity:  $\nu = 1 \text{ mm}^2 \text{ s}^{-1} = 10^{-6} \text{ mm}^2 \text{ s}^{-1}$  and  $\nu = 1,2 \text{ mm}^2 \text{ s}^{-1} = 1,2 \times 10^{-6} \text{ mm}^2 \text{ s}^{-1}$ .

avec  $A$  la constante de Hamaker ( $\sim 10^{-20} \text{ J}$ ),  $r$  le rayon des particules et  $d$  la distance entre les particules et où  $r \gg d$ .

Cette condition est ici remplie puisque si  $r \sim 1 \text{ mm}$ , alors la distance entre les particules  $d$  est inférieure au millimètre puisque :

$$d = \sqrt{\frac{A}{6B}} r^{3/2} \sim 4,08 \times 10^{-12} r^{3/2} \ll 1 \text{ mm}$$

Dade et al. [3] prennent en compte également dans leur modèle le rôle joué par les forces de Van der Waals ; cependant, contrairement au modèle présenté ici, ils ne tiennent pas compte des caractéristiques macroscopiques des matériaux cohésifs (cohésion  $C$ , angle de friction  $\phi$ ) qui peuvent également affecter les substrats non homogènes comprenant des grains de dimension plus importante.

## 5. Conclusion

Cette approche est différente des études précédentes, parce qu'elle traite aussi bien les substrats cohésifs que ceux non cohésifs. De plus, pour les substrats cohésifs, au lieu de considérer uniquement les processus d'interaction pour les particules les plus petites à travers la constante de Hamaker [3], les spécificités macroscopiques des substrats, homogènes ou

non, sont décrites. En effet, la cohésion n'est pas entièrement prédite par un terme en  $1/r^2$ .

Malgré la simplicité de la théorie, les résultats théoriques sont en accord avec les observations expérimentales de divers auteurs. Pour les particules cohésives de rayon inférieur à 0,1 mm, le seuil d'érosion diminue avec l'augmentation du rayon des particules. Pour les particules cohésives de rayon supérieur à 0,2 mm, le seuil d'érosion augmente avec l'augmentation du rayon des particules. L'action de la charge en sédiment sur le pouvoir érosif de la rivière est mise en évidence. Néanmoins, le modèle ne rend pas compte du fait que la charge sédimentaire a tendance à ralentir le flux et donc ne favorise plus le pouvoir érosif à partir d'un certain seuil.

## Références

- [1] R.A. Bagnold, The flow of cohesionless grains in fluid, Phil. Trans. R. Soc. Lond., Ser. A 249 (1956) 235–297.
- [2] R.A. Bagnold, Sedimentation: beach and nearshore processes, in: M.N. Hill (Ed.) The Sea, vol. 3, Interscience, New York, 1963, pp. 507–528.
- [3] W.B. Dade, A.R.M. Nowell, P.A. Jumars, Predicting erosion resistance of muds, Mar. Geol. 105 (1992) 285–297.
- [4] H.A. Einstein, The bedload function for sediment transportation in open channel flows, United States Department of Agriculture Technical Bulletin, n° 1026, 1950, 71 p.
- [5] H.C. Hamaker, The London–van der Waals attraction between spherical particles, Physica 4 (10) (1937) 1058–1072.
- [6] G.S. Hancock, R.S. Anderson, K. Whipple, Beyond power: bedrock river incision process and form. Rivers over Rock: fluvial processes in bedrock channels, Geophys. Monogr. 107 (1998) 35–60.
- [7] F. Hjulström, Studies of the morphological activity of rivers as illustrated by the river Fyris, Bull. Geol. Inst. Univ. Uppsala 25 (1935) 221–527.
- [8] M.C. Miller, I.N. McCave, P.D. Komar, Threshold of sediment motion under unidirectional currents, Sedimentology 24 (1977) 507–527.
- [9] H. Postma, Sediment transport and sedimentation in the estuarine environment, in: G.H. Lauff (Ed.) Estuaries, vol. 83, AAAS, Washington, DC, 1967, pp. 158–179.
- [10] K. Pye, Sediment Transport and Depositional Processes, Blackwell Scientific Publications, 1994, 397 p.
- [11] E. Schaaff, C. Grenz, C. Pinazo, Erosion of particulate inorganic and organic matter in the Gulf of Lion, C. R. Geoscience 334 (2002) 1071–1077.
- [12] P.L. Wiberg, J. Dungan Smith, Calculation of the critical shear stress for motion of uniform and heterogeneous sediments, Water Resour. Res. 23 (1987) 1471–1480.
- [13] Jiang Zhenhua, The motion of sediment–water mixtures during intense bedload transport: computer simulations, Sedimentology 42 (1995) 935–945.